Kapitel 7.4 Armstrong Kalkül

Def: Schlüsselbegriff

Sei R (A_1, ..., A_n) Relationsschema mit (einigen) funktionalen Abhängigkeiten F = { $X \rightarrow A$, $Z \rightarrow B$, ... }

Sei $X \subseteq \{A_1, \ldots A_n\}$

X ist Schlüsselkanditat von R, wenn

1. $X \rightarrow A_1 A_2 \ldots A_n$
2. Für keine echte Untermenge $Y \subsetneq X$

   gilt: $Y \rightarrow A_1 A_2 \ldots A_n$

Def: F^+ ist Hülle von F, d. h. Menge von funktionalen Abhängigkeiten, die durch F impliziert werden (Folge von F sind)

Erläuterung: R (A_1, ..., A_n) Schema,

$F = \{X_1 \rightarrow Y_1, X_2 \rightarrow Y_2, \ldots, X_k \rightarrow Y_k\}$

Seien R_i beliebige Instantiierungen von R, d. h. konkrete Relationen, die F erfüllen.
Die Menge aller solcher Instantiierungen sei $\Im$ (R, F)

Eine funktionale Abhängigkeit $X \rightarrow Y$ heißt ***von F impliziert*** (bzw. Folge von F), wenn

$\forall R_i \in \Im$ (R, F) gilt auch $X \rightarrow Y$

Vergleiche auch Begriffe aus Logik:

Interpretation: beliebige Instantiierungen R_j für R, ohne daß F gelten muß.

Modell: $R_i \in \Im\ (R, F)$
logische Folge: von F implizierte funktionale Abhängigkeit

$\Rightarrow \Im\ (R, F)$ ist Menge der Modelle für F mit Schema R,

F^+ ist Menge der logischen Folgen von F

Beispiel: R (A, B, C)
$F = \{ A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$
welche Abh. folgen aus F, was ist F^+? welche $X \rightarrow Y$?

1. ausgehend von **A → B**: $A \rightarrow C$, $AB \rightarrow B$, $AB \rightarrow A$,
   $AB \rightarrow C$, ...,
   $A \rightarrow ABC$
   d. h. A ist Schlüsselkandidat
2. ausgehend von **B → C**: $B \rightarrow B$, $BC \rightarrow B$, $BC \rightarrow C$, ..., $B \rightarrow \emptyset$
   d. h. X enthält B, C aber nicht A
   und Y enthält nicht A
   d. h. kein Schlüsselkandidat
3. ausgenend von **C → C**: $C \rightarrow \emptyset$

Wie geht das systematisch?

Bestimmung von Schlüsseln:

Gegeben F, bestimme F^+ (Algorithmus dafür?)

X ist Schlüsselkandidat, wenn

$X \rightarrow A_1 A_2 \ldots A_n \in F^+$

und X ist minimal.

Beispiel: in R (A, B, C) von oben ist nur

$A \rightarrow ABC \in F^+$ und minimal,

d. h. A ist einziger Schlüsselkandidat.

Beispiel: Adresse (City, Street, ZIP)

$$\left.\begin{array}{r} CS \rightarrow Z \\ Z \rightarrow C \end{array}\right\} = F$$

1.Schlüsselkandidat CS weil $CS \rightarrow CSZ$

2.Schlüsselkandidat SZ weil $Z \rightarrow C$

$SZ \rightarrow SC$

$SZ \rightarrow SCZ$

Armstrong Axiome: zur Berechnung von F^+ aus F:
(1974), U sei Gesamtmenge der Attrribute einer Relation

A1: Reflexivität: $Y \subseteq X \subseteq U \quad \Rightarrow \quad X \rightarrow Y \in F^+$
(hängt nicht von F ab)

A2: Erweiterung: (Augmentation)

$$X \rightarrow Y,\ Z \subseteq U \quad \Rightarrow \quad XZ \rightarrow YZ \in F^+$$

hier ist $X \rightarrow Y \in F$ oder schon abgeleitet, d. h. $X \rightarrow Y \in F^+$

A3: Transitivität:

$$X \rightarrow Y,\ Y \rightarrow Z \quad \Rightarrow \quad X \rightarrow Z \in F^+$$

obiges Beispiel:
Adresse (City, Street, ZIP)

Beweis: daß SZ Schlüssel ist: $\left.\begin{array}{r} CS \rightarrow Z \\ Z \rightarrow C \end{array}\right\} = F$

1. $Z \rightarrow C$ — $\in F$
2. $SZ \rightarrow SC$ — *nach Axiom A2*
3. $CS \rightarrow Z$ — *in F*
4. $CS \rightarrow ZCS$ — *Augmentation von 3. um CS, nach A2*
5. $SZ \rightarrow ZCS$ — *Transitivität aus 2. und 4.*

Beweis, daß CS Schlüsselk. trivial.

Konsistenzlemma: Armstrong Axiome sind ***konsistent***,
d.h. mit Axiomen A1, A2, A3 können nur funktionale Abhängigkeiten abgeleitet werden.

Beweis:

zu A1: $Y \subseteq X \Rightarrow X \rightarrow Y$

seien r, s zwei Tupel in R_i

Übereinstimmung von r, s in X-Attrib.

$\Rightarrow$ Übereinstimmung von r, s in Y-Attrib.

zu A2: $X \rightarrow Y, Z \subseteq U \quad \Rightarrow \quad XZ \rightarrow YZ \in F^+$

seien X, Y, Z Attribut Mengen von R

Tupel r, s seien übereinstimmend auf XZ, aber nicht auf YZ.

Dann müssen sich r, s bzgl. Y-Attrib. unterscheiden

i.e. Widerspruch zu $X \rightarrow Y$, also doch $XZ \rightarrow YZ$

zu A3: klar

Hinweis: *Durch wiederholte Anwendung der Armstrong Axiome lassen sich weitere Schlussregeln ableiten!*

Lemma:

a) **Vereinigung:**

$X \to Y, X \to Z \quad \Rightarrow \quad X \to YZ$

b) **Pseudotransitivität:**

$X \to Y, YW \to Z \quad \Rightarrow \quad XW \to Z$

c) **Zerlegung:**

$X \to Y, Z \subseteq Y \quad \Rightarrow \quad X \to Z$

Beweise:

a) $X \to Y, X \to Z$

$X \to YX, XY \to ZY$ Erweiterung um X bzw. Y

$X \to ZY$ Transitivität

b) $X \to Y$

$XW \to YW$ Erw; $XW \to Z$ Trans.

c) $X \to Y, Z \subseteq Y$ Refl.: $Y \to Z$

$X \to Z$ Transititvität

q.e.d.

Anmerkung, Lemma:

$$X \rightarrow A_1 A_2 \ldots A_n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} X \rightarrow A_1 \\ X \rightarrow A_2 \\ \ldots \\ X \rightarrow A_n \end{array}$$

Beweis: $\Rightarrow$ Zerlegungsregel
$\Leftarrow$ Vereinigungsregel

Def: Sei $X \subseteq U$;
Hülle X^+ von X bezogen auf F ist die Menge von Attributen $A \in U$ mit: $X \rightarrow A$ ableitbar aus F mit Armstrong Axiomen, d.h. $X \rightarrow A \in F^+$

Hinweis: unterscheide X^+ und F^+
Lemma: $X \rightarrow Y$ folgt aus Armstrong Axiomen $\Leftrightarrow Y \subseteq X^+$
Beweis: Übung!

Vollständigkeit des Armstrong Kalküls

Def: Vollständigkeit:
alle funktionalen Abhängigkeiten, die aus F folgen, sind mit Armstrong Kalkül ableitbar.
Formal:

$$\textbf{(} \; \forall R_i \in \Im\,(R, F)\text{: } X \rightarrow Y \; \textbf{)} \Rightarrow \; X \rightarrow Y \in F^+$$

oder: alle allgemein geltenden funktionalen Abhängigkeiten folgen aus Armstrong Axiomen.

Satz: Armstrong Axiome sind konsistent und vollständig.

Beweis:

1. Kosistenzlemma, o.k.
2. Vollständigkeit: durch Widerspruch

Annahme 1: $\exists$ funkt. Abhängigkeit $X \rightarrow Y$, die allgemein gilt, aber nicht aus F ableitbar ist, d.h. $Y \not\subset X^+$

Idee: Konstruiere spezielle Rel. R_1 für die gilt:

R_1 erfüllt F, d.h. R_1 ist zulässige Relation: $R_1 \in \Im(R, F)$

aber $X \rightarrow Y$ gilt nicht für R_1, d.h. ist nicht allg. gültig bzw. nicht logische Folge von F.

definiere R_1 so:

$$
\begin{array}{cccc}
x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\
1 & 1 & \ldots & 1 \\
1 & 1 & \ldots & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
y_j & \ldots & \\
1 & \ldots & 1 \\
0 & \ldots & 0
\end{array}
$$

Attr. von X^+ — andere Attr.

$\exists\ y_j$ weil $Y \not\subset X^+$

Hilfslemma 2.1: Alle Abhängigkeiten von F sind von R_1 erfüllt, d.h. $R_1 \in \mathfrak{I}(R, F)$, d.h. R_1 ist zulässig

Beweis: durch Widerspruch

Annahme 2: Sei $V \to W \in F$, aber von R_1 nicht erfüllt,
d.h. 2 Tupel in R_1 sind gleich bzgl. V,
ungleich bzw. W
wegen obiger Form von R_1: $V \subseteq X^+$, $W \not\subseteq X^+$
sei $A \in W$, $A \notin X^+$
Es gilt $X \to V$ weil $V \subseteq X^+$
(siehe voriges Lemma)

$V \to W$ nach Anname 2, also $X \to W$ wegen Transitivität,
also $W \subseteq X^+$,
somit $A \in X^+$, $\lightning$
d.h. $V \to W$ wird durch R_1 erfüllt,
$R_1 \in \mathfrak{I}$ (R, F),
d.h. R_1 zulässig.

Hilfslemma 2.2: $X \rightarrow Y$ gilt nicht für R_1, d.h. ist nicht allg. gültig.

Beweis: durch Widerspruch

Annahme 3: $X \rightarrow Y$ gelte für R_1

$X \subseteq X^+$ ✓

also muß wegen Form von R_1 $Y \subseteq X^+$ sein,
weil sonst die 2 R_1-Tupel auf X gleich,
aber auf Y verschieden wären,
(d.h. es gäbe keine $X \rightarrow Y$ Abhängigkeit).
Wenn aber $Y \subseteq X^+$, dann ist $X \rightarrow Y$ aus F ableitbar,
i.e. ↯ zur Anname 1.

Algorithmus zur Berechnung von X^+ aus X entsprechend F

X sei feste Attributmenge
x, y, z seien Variablen für Attributmengen
$\boldsymbol{U}$ sei Prädikat: $\boldsymbol{U}$ (x, y) : $y \subseteq x$ Untermenge
$\boldsymbol{A}$ sei Prädikat : $\boldsymbol{A}$ (x, y) : $x \rightarrow y$ Abhäng.

Horn-Klausel-System (Prolog)
entsprechend Armstrong Axiomen

$\boldsymbol{U}$ (X, Y):- für alle $Y \subseteq X \subseteq U$

d. h. $\boldsymbol{U}(X, Y_1)$:-

$\boldsymbol{U}(X, Y_2)$:-

:

$\boldsymbol{U}(Y, Z_1)$:-

davon gibt es viele!!

$\boldsymbol{A}$ (X, Y) :-		für alle $X \rightarrow Y \in F$
$\boldsymbol{A}$ (x, y) :-	$\boldsymbol{U}$ (x, y)	i.e. A1
$\boldsymbol{A}$ (xz, yz):-	$\boldsymbol{A}$ (x, y) $\boldsymbol{U}$ (U, z)	i.e. A2
$\boldsymbol{A}$ (x, z) :-	$\boldsymbol{A}$ (x, y) $\boldsymbol{A}$ (y, z)	i.e. A3

i.e. Horn-Klausel System mit kleinstem Fixpunkt
= kleinstes Herbrand Modell M.

$$X^+ = \{a : \quad \boldsymbol{A}(X, a) \in M\}$$

Ausführung durch Aufruf $\boldsymbol{A}$(X, a)

Direkter Algorithmus für Berechnung von X^+ aus X

Eingabe: U : endliche Menge von Attrib.

F : funkt. Abhängigkeiten über U

X : $X \subseteq U$

Ausgabe: X^+, Hülle von X bzgl. F, U

Alg. 1. $X^0 := X$

2. $X_{i+1} := X_i \cup \{A \mid \exists\, Y \rightarrow Z \in F: Y \subseteq X_i \wedge A \in Z\}$

$\{$Zusicherung: $X_i \subseteq X_{i+1} \subseteq U\}$

bis $X_{i+1} = X_i =: X^+$ d.h. Fixpunkt ist erreicht!

Beispiel: U = {A, B, C, D, E, G}

F sei:

$AB \rightarrow C$	$D \rightarrow EG$
$C \rightarrow A$	$BE \rightarrow C$
$BC \rightarrow D$	$CG \rightarrow BD$
$ACD \rightarrow B$	$CE \rightarrow AG$

Frage: **X := BD** **X^+ = ?**